

Binomul lui Newton Clasa a X-a

1 Noțiuni, formule și notații

Definiția 1: Binomul de forma $(a + b)^n$, unde a și b sunt expresii numerice sau literale, iar n este un număr natural se numește **binomul lui Newton**.

Teoremă: Dacă a și b sunt două numere reale (sau complexe) și n este un număr natural, atunci are loc formula: $(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$, unde

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ și } n \in N^*, k \in N, 0 \leq k \leq n \quad (1)$$

• Formula (1) se numește **dezvoltarea binomului lui Newton după puteri** sau **formula lui Newton**, sau **dezvoltarea binomului lui Newton la putere**.

• Pe scurt binomul lui Newton se scrie:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \text{ unde } n \in N^* \quad (2)$$

Definiția 2: Termenul $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ (3), unde $n, k \in N, 0 \leq k \leq n$ se numește **termenul de rangul $k+1$** (sau **termenul general**) al binomului lui Newton.

Definiția 3: Numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^k, \dots, C_n^n$ se numesc **coeficienți binomiali** ai dezvoltării binomului lui Newton.

2 Proprietăți referitoare la binomul lui Newton

1) Binomul $(a + b)^n$ are în dezvoltarea sa $n+1$ **termeni**: $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, T_{n+1}$

2) Binomul $(a + b)^n$ are în dezvoltarea sa $n+1$ **coeficienți binomiali**:

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n, \text{ unde } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n \in N^*, k \in N, 0 \leq k \leq n.$$

3) În formula lui Newton coeficienți binomiali egali depărtați de la extremități sunt egali:
 $C_n^k = C_n^{n-k}$, unde $n \in N^*, k \in N, 0 \leq k \leq n$.

4) **Relația de recurență liniară** (de ordinul întâi) între **coeficienți binomiali** consecutivi ai dezvoltării binomului lui Newton este:

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot C_n^k, \text{ unde } n, k \in N, 0 \leq k \leq n \quad (4)$$

5) În formula lui Newton exponenții puterilor lui a descresc de la n până la 0, iar exponenții puterilor lui b cresc de la 0 până la n .

6) În formula lui Newton suma coeficienților binomiali este egală cu 2^n :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n, \forall n \in N \quad (5)$$

7) Suma coeficienților binomiali de **rang impar** (sau **par**) este egală cu 2^{n-1} :

$$\text{a) } C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2k} + \dots = 2^{n-1} \quad (6)$$

$$\text{b)} \quad C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{2k+1} + \dots = 2^{n-1} \quad (7)$$

8) Relația de recurență liniară (de ordinul întâi) între termenii consecutivi ai dezvoltării binomului lui Newton la putere este:

$$T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_{k+1}, \text{ unde } n, k \in N, \quad 0 \leq k \leq n \quad (8)$$

9) Dacă n este par, adică $n = 2m$, unde $m \in N^*$, atunci în dezvoltarea binomului lui Newton **unicul termen de mijloc** este:

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m = C_{2m}^m a^m b^m \quad (9)$$

10) Dacă n este par, adică $n = 2m$, unde $m \in N^*$, atunci în dezvoltarea binomului lui Newton

coeficientul binomial al termenului de mijloc este cel mai mare și este egal cu $C_n^{\frac{n}{2}} = C_{2m}^m$, iar binomul conține un număr impar de termeni, adică binomul are $n+1 = 2m+1$ termeni.

11) Dacă n este impar, adică $n = 2m+1$, unde $m \in N^*$, atunci dezvoltarea binomului lui Newton conține **doi termeni de mijloc**, care au coeficienții binomiali cei mai mari și care sunt:

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m = C_{2m+1}^m a^{m+1} b^m \quad (10)$$

$$T_{m+2} = C_n^{m+1} a^{n-m-1} b^{m+1} = C_{2m+1}^{m+1} a^m b^{m+1} \quad (11)$$

12) Dacă n este impar, adică $n = 2m+1$, unde $m \in N^*$, atunci dezvoltarea binomului lui Newton la putere conține un număr par $n+1 = 2m+2$ de termeni și cei mai mari coeficienți binomiali sunt coeficienții binomiali ai termenilor de mijloc: C_n^m și C_n^{m+1} .

13) Binomul $(a-b)^n$ se poate scrie $(a-b)^n = (a+(-b))^n$ și se folosește formula (1), substituind b prin $(-b)$.

14) În binomul $(a-b)^n$ se poate aplica direct formula (12):

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n b^0 - C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \dots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^n C_n^n a^0 b^n$$

15) În binomul $(a-b)^n$ termenul de rangul $k+1$ (**sau** termenul general) al binomului lui Newton este:

$$T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k, \text{ unde } n, k \in N \text{ și } 0 \leq k \leq n \quad (13)$$

16) Pe scurt dezvoltarea binomului $(a-b)^n$ se scrie:

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k, \text{ unde } n \in N^* \quad (14)$$

17) Coeficienții binomiali din dezvoltarea binomului $(a-b)^n$ satisfac relația:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = 0, \text{ pentru orice } n \in N^* \quad (15)$$

18) Coeficienții binomiali din dezvoltarea binomului $(a+b)^n$ satisfac relația: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$, unde $n, k \in N, 0 \leq k \leq n$ (16)

3 Triunghiul (aritmetic) al lui Pascal

• **Triunghiul (aritmetic) al lui Pascal** este triunghiul coeficienților binomiali C_n^k în dezvoltarea la putere a binomului lui Newton $(a+b)^n$.

• **Coeficienții binomiali** sunt: C_n^k , unde $n, k \in N$ și $0 \leq k \leq n$.

- **Coeficienții binomiali** satisfac relația $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$, unde $n, k \in N$, $0 \leq k \leq n$

(17)

- În triunghiul lui Pascal elementele (numerele) din linia următoare se pot determina folosind proprietatea:

Un element oarecare este egal cu suma dintre elementul de deasupra lui și elementul din stânga acestuia.

- Liniile din **triunghiul (aritmetic) al lui Pascal** se completează folosind coeficienții termenilor din formulele care urmează și aplicând proprietatea (17) de mai sus.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$$

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$

- **Triunghiul (aritmetic) al lui Pascal** se poate scrie în două forme (moduri):

1							1									$n = 0$
1	1						1	1								$n = 1$
1	2	1					1	2	1							$n = 2$
1	3	3	1				1	3	3	1						$n = 3$
1	4	6	4	1			1	4	6	4	1					$n = 4$
1	5	10	10	5	1		1	5	10	10	5	1				$n = 5$
1	6	15	20	15	6	1	1	6	15	20	15	6	1			$n = 6$
1	7	21	35	35	21	7	1	7	21	35	35	21	7	1		$n = 7$

Remarcă: Pentru a completa și memoriza triunghiul lui Pascal se aplică regula de calculare a elementelor lui:

Regulă: Oricare element al triunghiului lui Pascal (în afară de cei extremi care sunt egali cu 1) este egal cu suma a două elemente din rândul anterior (linia) dintre care unul este cel precedent, iar celălalt este cel următor.

Exemplul 1: Pentru determinarea coeficienților lui $(a+b)^5$ din linia a 6-a se adună câte doi coeficienți ai lui $(a+b)^4$ din linia a 5-a:

$$1; \quad 1+4=5; \quad 4+6=10; \quad 6+4=10; \quad 4+1=5; \quad 1$$

$$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$

Exemplul 2: Pentru $(a+b)^5$ avem:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= 1 \cdot a^5 b^0 + 5 \cdot a^4 b^1 + 10 \cdot a^3 b^2 + 10 \cdot a^2 b^3 + 5 \cdot a^1 b^4 + 1 \cdot a^0 b^5 = \\&= C_5^0 \cdot a^5 b^0 + C_5^1 \cdot a^4 b^1 + C_5^2 \cdot a^3 b^2 + C_5^3 \cdot a^2 b^3 + C_5^4 \cdot a^1 b^4 + C_5^5 \cdot a^0 b^5 \\C_5^0 &= 1 \quad C_5^1 = 5 \quad C_5^2 = 10 \quad C_5^3 = 10 \quad C_5^4 = 5 \quad C_5^5 = 1\end{aligned}$$

4 Probleme de sinteză

Problema 1: Este dat binomul lui Newton $(a^2 \cdot \sqrt{a} + 2 \cdot \sqrt[3]{a})^n$.

Sarcini (să se îndeplinească următoarele sarcini):

S.1 Să se determine n , dacă se știe, că suma coeficienților binomiali de rang par (impar) este egală cu 512;

Răspuns: $n = 10$

S.2 Să se determine numărul de termeni în dezvoltarea după puteri a binomului dat;

Răspuns: $n + 1 = 10 + 1 = 11$ termeni.

S.3 Să se determine termenul de mijloc al binomului dat;

Răspuns:

S.4 Să se determine termenul de rang $k+1$ (termenul general) al binomului dat;

Răspuns:

S.5 Să se determine termenul ce nu-l conține pe a în dezvoltarea după puteri a binomului dat;

Răspuns: Termenul ce nu-l conține pe a este

S.6 Să se determine termenul ce-l conține pe a^{12} în dezvoltarea după puteri a binomului dat.

Răspuns:

Problema 2: Este dat binomul lui Newton $\left(a \cdot \sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$.

Sarcini (să se îndeplinească următoarele sarcini):

S.1 Să se determine n , dacă se știe, că suma coeficienților binomiali de rang par (impar) este egală cu 1024;

Răspuns: $n = 11$.

S.2 Să se determine numărul de termeni ai dezvoltării după puteri a binomului dat;

Răspuns: $n + 1 = 11 + 1 = 12$ termeni.

S.3 Să se determine termenii de mijloc ai binomului dat;

Răspuns:

S.4 Să se determine termenul de rang $k+1$ (termenul general) al binomului dat;

Răspuns:

S.5 Să se determine termenul ce nu-l conține pe a în dezvoltarea după puteri a binomului dat;

Răspuns:

S.6 Să se determine termenul ce-l conține pe a^6 în dezvoltarea după puteri a binomului dat;

Răspuns:

S.7 Să se determine termenii raționali ai dezvoltării după puteri a binomului dat.

Răspuns:

Problema 3: Este dat binomul lui Newton $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{2}{x}\right)^{18}$.

Sarcini (să se îndeplinească următoarele sarcini):

S.1 Să se determine termenul în care nu apare x în dezvoltarea după puteri a binomului dat;

Răspuns: $k=3$, al $3+1=4$ lea termen nu conține x

S.2 Să se determine termenul de mijloc al binomului dat;

Răspuns:

S.3 Să se determine termenul de rang $k+1$ (termenul general) al binomului dat;

Răspuns:

S.5 Să se determine termenului ce nu-l conține pe x în dezvoltarea după puteri a binomului dat.

Răspuns:

Problema 4: Este dat binomul lui Newton $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{50}$.

S.1 Să se determine termenul de rang $k+1$ (termenul general) al binomului dat;

Răspuns:

S.2 Să se determine termenul din dezvoltarea după puteri a binomului dat în care x și y au puteri egale.

Răspuns:

S.3 Să se determine termenii raționali ai dezvoltării după puteri a binomului dat.

Răspuns:

Problema 5: Este dat binomul lui Newton $\left(2x \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$.

S.1 Să se determine n , dacă se știe, că suma coeficienților binomiali de rang par (impar) este egală cu 128;

Răspuns: $n = 8$.

S.2 Să se determine termenul de rang $k+1$ (termenul general) din dezvoltarea după puteri a binomului dat;

Răspuns:

S.3 Să se determine termenul de mijloc din dezvoltarea după puteri a binomului dat;

Răspuns:

S.4 Să se determine termenii raționali din dezvoltarea după puteri a binomului dat.

Răspuns: